uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	B

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{1}$ y el plano $\pi\colon x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \dfrac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.
Se consideran los sucesos $A = \{7,11,13,19\}$, $B = \{2,5,7,13,17\}$ y $C = \{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right)$.

b) (1.25 puntos) $P\left((A \cap B) \mid \overline{C}\right)$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

Planteamiento: 1.5 puntos. (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

1.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.

a) Cálculo correcto de valores máximos y mínimos: 0.5 puntos. Respuesta correcta de la pregunta: 0.25 puntos.
b) Cálculo del área de una región con una integral definida: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.5 puntos). Cálculo del área de la segunda región: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

3.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos (0.25 puntos por cada punto).

3.2.

a) Cálculo de la distancia: 0.5 puntos.
b) Planteamiento geométrico: 0.5 puntos. Cálculo del punto Q: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.1.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

Si x es el número de lanzamientos de un punto, y el de dos y z el de tres, hay que resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x+5y+6z & = & 400 \\ 3x-5y+3z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 5 \end{array} \right. .$$

La solución del sistema es $x = 25$, $y = 30$ y $z = 25$. Por lo tanto, el equipo realizó 25 tiros de uno, 30 de dos y 25 de tres.

1.2.

a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10)$ es el polinomio.
Igualando a cero el polinomio anterior y resolviendo la ecuación asociada, se obtienen $\lambda = 2$ (raíz doble) y $\lambda = 5$.

b) Se resuelve el sistema $(A - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que es un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones son de la forma $(x, y, z) = (t, t, \frac{5}{3}t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Un posible vector no nulo es $(x, y, z) = (3, 3, 5)$.

2.

a) La función $\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)$ está acotada entre -1 y 1. Al estar desplazada verticalmente dos unidades, el valor mínimo es 1 y el valor máximo es 3. Ambos valores están dentro del muro de altura 3 metros.
b) La función es positiva en todo su dominio. El área bajo la curva contenida en el muro es:

$$A_{\text{inf}} = \int_0^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} = \frac{9}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 \approx 21.52 \text{ m}^2.$$

Como el área del muro es base por altura, el área total para pintar es $36\,\mathrm{m}^2$. El área para pintar por encima de la curva es $36 - A_{\text{inf}} = 12 - \frac{9}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx 14.48\ \mathrm{m}^2$.
c) Serán necesarios $A_{\text{inf}}/3 \approx 7.17$ botes para pintar el área inferior. Por lo tanto, se tienen que comprar 8 botes para pintar toda el área inferior.

3.1.

a) El plano pasa por el punto $P(1, 0, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ (director de la recta) y $\vec{v} = (1, 2 - 3)$, por lo que una ecuación paramétrica del plano pedido es $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 2, -3)$.
Una ecuación cartesiana del plano es $2x - 7y - 4z + 6 = 0$.
b) Ambas rectas se cortan en el punto de intersección entre π y r. Resolvemos $(1 + 2\lambda) + 2(0) - 3(2 + \lambda) = 1$, $\lambda = -6$, la recta buscada pasa por el punto $(-11, 0, -4)$ y como vector director tendrá el perpendicular al normal al plano π y perpendicular al director de la recta r, es decir, $(2, 0, 1) \times (1, 2, -3) = (-2, 7, 4)$. Así una ecuación de la recta pedida es $\frac{x + 11}{-2} = \frac{y}{7} = \frac{z + 4}{4}$.
c) Teniendo en cuenta la distancia de un punto genérico P de la recta r al plano π, tenemos que

$$\mathrm{dist}(P, \pi) = \frac{|1 \cdot (1 + 2\lambda) + 2 \cdot 0 - 3 \cdot (2 + \lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14}.$$

De esta ecuación tenemos $|-\lambda - 6| = 14$, cuyas soluciones son $\lambda = -20$ y $\lambda = 8$. Sustituyendo estos valores de λ en la ecuación de la recta, obtenemos que los puntos buscados son: $(-39, 0, -18)$ y $(17, 0, 10)$, respectivamente.

3.2.

a) $d(P,\pi) = \dfrac{|0+1-2|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
b) Vector normal del plano π es $\vec{u} = (1,1,0)$. La recta r que pasa por P y es perpendicular a π tiene ecuación: $(x,y,z) = (\lambda, 1+\lambda, 1)$.
La intersección de r con π da $\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda = 1/2$. El punto Q es $(1/2, 3/2, 1)$.
c) El plano π solo tiene dos puntos de corte con los ejes coordenados $A(2,0,0)$ y $B(0,2,0)$. El área del triángulo formado por P, A y B es:

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}\| = \sqrt{3}.$$

4.1.

Sea $x = P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19)$. Como $P(E) = 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{2}{4} = 6 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{1}{12}$.
a) $A - C = \{19\} \Rightarrow \overline{(A-C)} \cap B = B$ y por lo tanto $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right) = P(B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{12} = \dfrac{7}{12}$.

b) $A \cap B = \{7, 13\}$ y $\overline{C} = \{2, 17, 19\}$ de forma que $P\left((A \cap B) \mid \overline{C}\right) = \dfrac{P\left((A \cap B) \cap \overline{C}\right)}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(\emptyset)}{\frac{3}{12}} = 0$.

4.2.

Consideremos los sucesos A = “tener entre 14 y 24 años”, B = “tener entre 25 y 64 años”, C = “tener más de 64 años” y D =“ser lector habitual”.
a) Teniendo los porcentajes sobre la población de más de 14 años, se puede utilizar el teorema de la probabilidad total. La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) \\ &= 0.74 \cdot 0.2 + 0.658 \cdot 0.5 + 0.537 \cdot 0.3 = 0.6381. \end{aligned}$$

b) $P(B \mid \overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|B) \cdot P(B)}{1 - P(D)} = \dfrac{0.342 \cdot 0.5}{1 - 0.6381} \approx 0.4725$.
